

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**  
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 7–8 класса

---

**Задача 1**

**В-1** Найдите произведение всех целых  $n$ , при которых  $n^2 + 2n - 120$  — простое число.

**Ответ:**  $-143$

**Решение.** Так как

$$n^2 + 2n - 120 = (n + 12)(n - 10),$$

то один из сомножителей равен 1 или  $-1$ .

Рассмотрим 4 случая.

1)  $n + 12 = 1$ . Значит,  $n = -11$ ,  $n - 10 = -21$ , выражение составное.

2)  $n + 12 = -1$ . Значит,  $n = -13$ ,  $n - 10 = -23$ , выражение простое.

3)  $n - 10 = 1$ . Значит,  $n = 11$ ,  $n + 12 = 23$ , выражение простое.

4)  $n - 10 = -1$ . Значит,  $n = 9$ ,  $n + 12 = 21$ , выражение составное.

Подходят  $n = -13, 11$ , произведение которых равно  $-143$ .

---

**В-2** Найдите сумму всех целых  $n$ , при которых  $n^2 + 2n - 80$  — простое число.

**Ответ:**  $-2$

---

**В-3** Найдите сумму всех целых  $n$ , при которых  $n^2 - 2n - 120$  — простое число.

**Ответ:**  $2$

---

**В-4** Найдите произведение всех целых  $n$ , при которых  $n^2 - 2n - 80$  — простое число.

**Ответ:**  $-99$

---

### Задача 2

**В-1** Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 2 круга в минуту, скорость мамы 2 круга в час и скорость папы 4 круга в час?

**Ответ:** 20

**Решение.** Совместная скорость родителей  $v = 2 + 4 = 6$  кр/ч. Таким образом, время, которое прошло до момента встречи — это  $\frac{1}{6}$  часа. Расстояние, которое проедет девочка на самокате со скоростью 2 круга/мин = 120 кругов/час будет

$$\frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ кругов.}$$

---

**В-2** Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 3 круга в час и скорость папы 2 круга в час?

**Ответ:** 12

---

**В-3** Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 0.5 круга в минуту, скорость мамы 1 круг в час и скорость папы 2 круга в час?

**Ответ:** 10

---

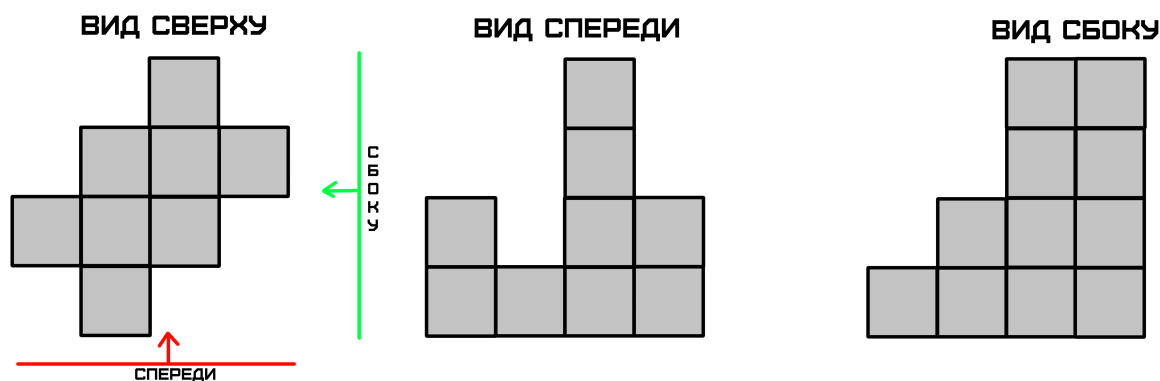
**В-4** Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 0,5 круга в час и скорость папы 1 круг в час?

**Ответ:** 40

---

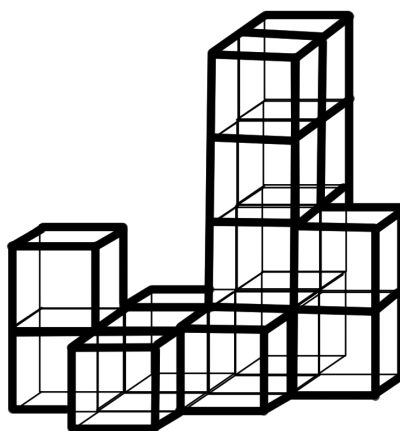
### Задача 3

**В-1** На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наименьшее число незакрашенных граней могло получиться?



**Ответ:** 40

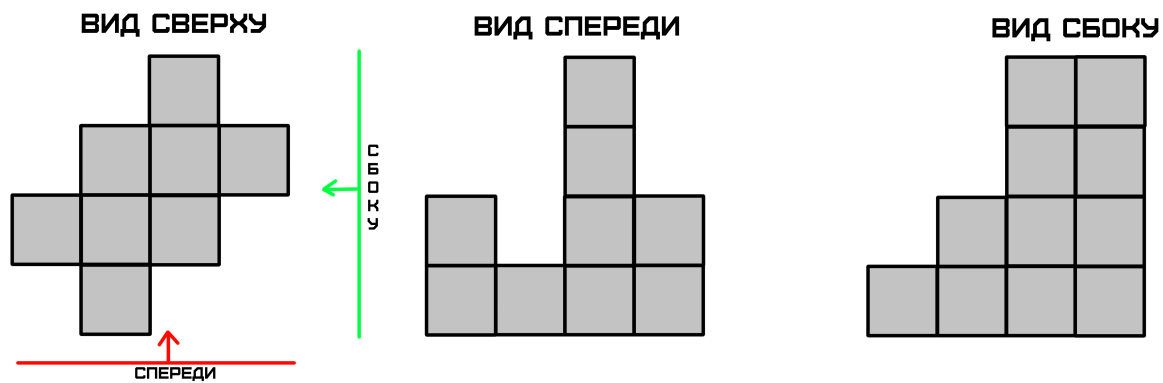
**Решение.** Получаем для случая минимума следующую картинку:



Ответ равен 40

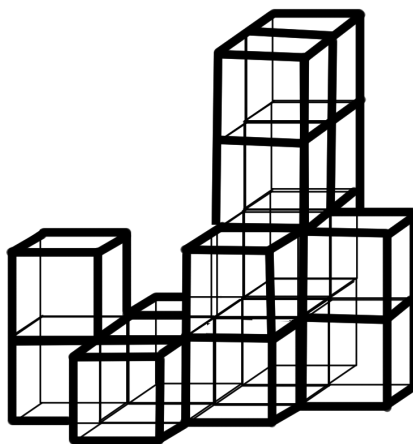
---

**В-2** На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наибольшее число незакрашенных граней могло получиться?



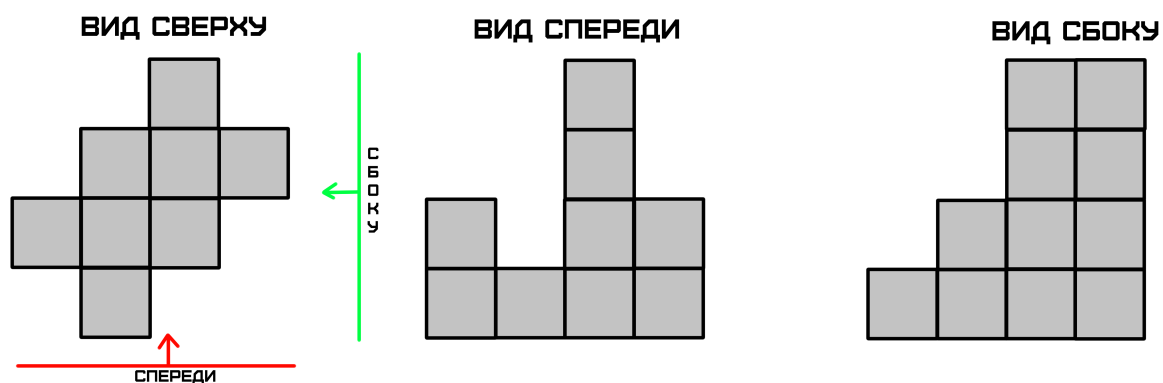
Ответ: 44

Решение. Получаем для случая максимума следующую картинку:



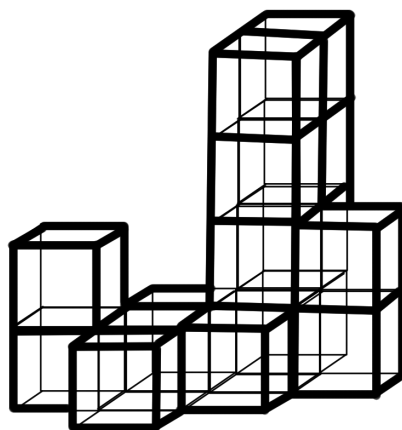
Ответ равен 44.

**В-3** Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти минимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



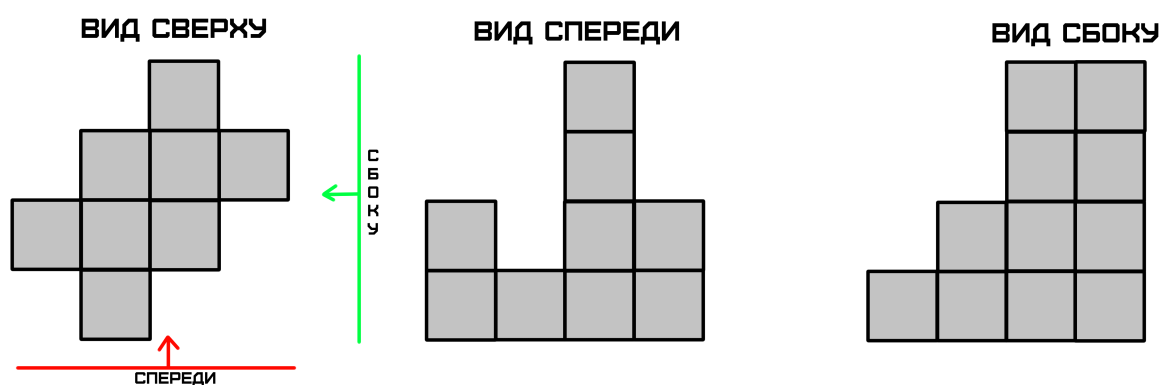
Ответ: 20

Решение. Получаем для случая минимума следующую картинку:



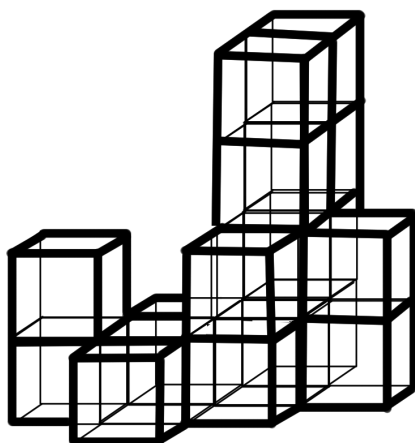
Ответ равен 20

**В-4** Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти максимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



Ответ: 22

**Решение.** Получаем для случая максимума следующую картинку:



Ответ равен 22.

#### Задача 4

**В-1** В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ЧЧ:ММ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

**Ответ:** 24

**Решение.** Когда экран стоит на своём месте — его показания всегда правильные. Если же экранчики стоят не на своём месте — показания получатся правильные в том случае, когда на экранчиках одинаковые числа (например, 15:15). Во всех вариантах экран с часами стоит не на своём месте, он показывает числа от 00 до 23 (24 варианта), поэтому показания минут и/или секунд должны соответствовать. То есть, если один экран стоит на своём месте, мы получаем  $24 \cdot 60$  вариантов, а если ни один не стоит на своём месте — вариантов будет только 24.

---

**В-2** В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ММ:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

**Ответ:** 1440

---

**В-3** В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:ЧЧ:СС. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

**Ответ:** 1440

---

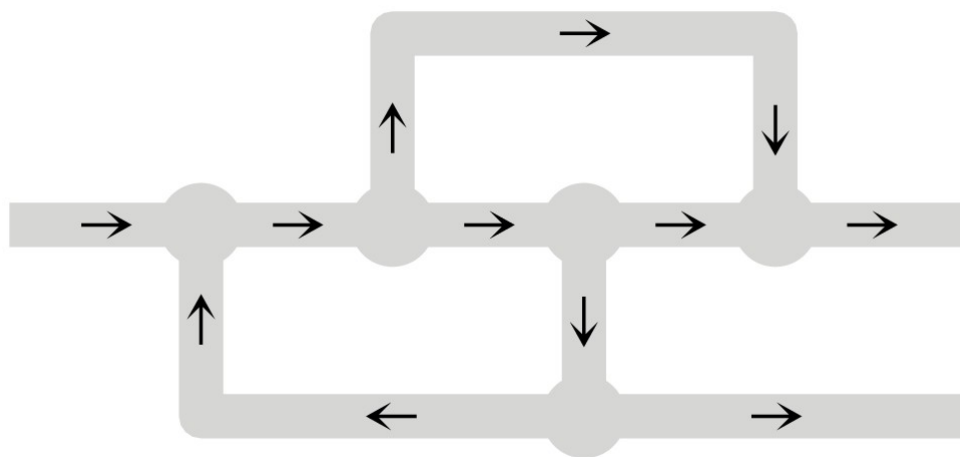
**В-4** В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:СС:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

**Ответ:** 24

---

### Задача 5

В-1

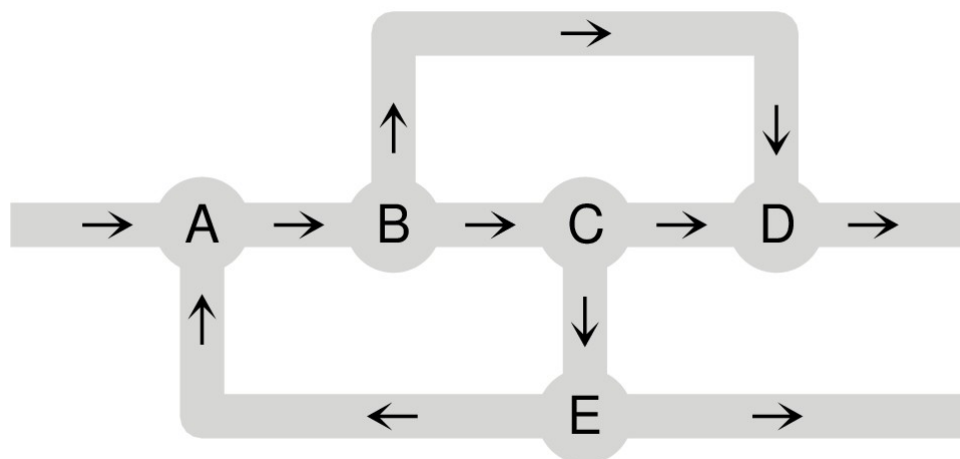


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.86

**Решение.**

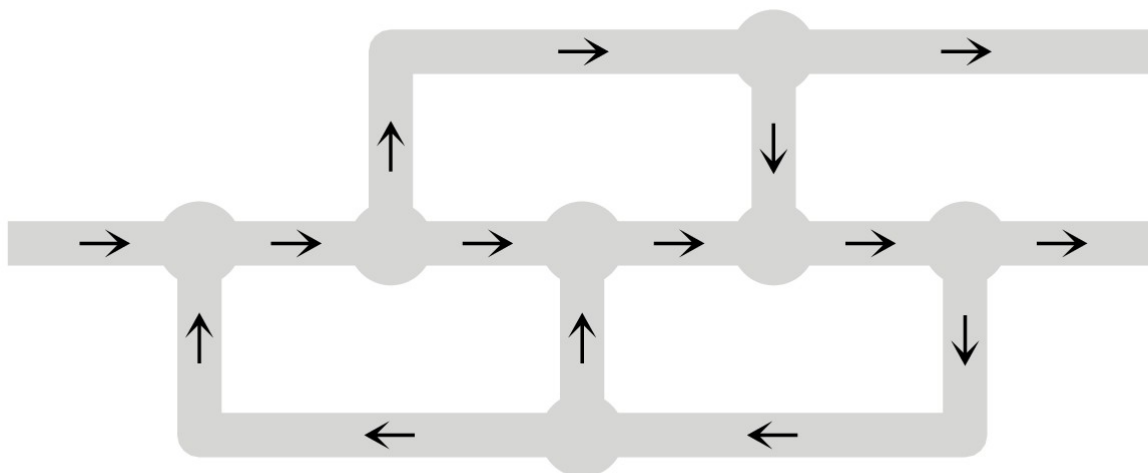


Пойдём по трубам последовательно. В клапане  $A$  к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной  $x$ . Тогда: в точке  $B$  поток разделится на  $\frac{1+x}{2}$  и  $\frac{1+x}{2}$ . В точке  $C$  приходящее разделится на  $\frac{1+x}{4}$  и  $\frac{1+x}{4}$ . В точке  $D$  сойдутся вместе  $\frac{1+x}{2}$  и  $\frac{1+x}{4}$ . В точке  $E$  поток разделяется на  $\frac{1+x}{8}$  и  $\frac{1+x}{8}$ , и здесь оказывается, что  $x = \frac{1+x}{8}$ . Откуда мы однозначно находим  $x = \frac{1}{7}$ . А исходящий поток поделится в отношении  $\frac{1+x}{2} + \frac{1+x}{4}$  к  $\frac{1+x}{8}$ , то есть

6 к 1, если упростить дроби.

---

## В-2



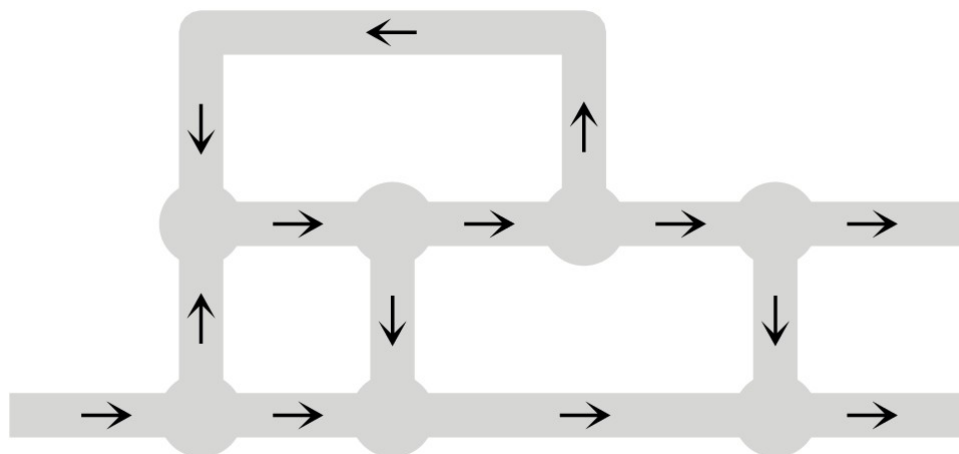
Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.33

---

## В-3



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

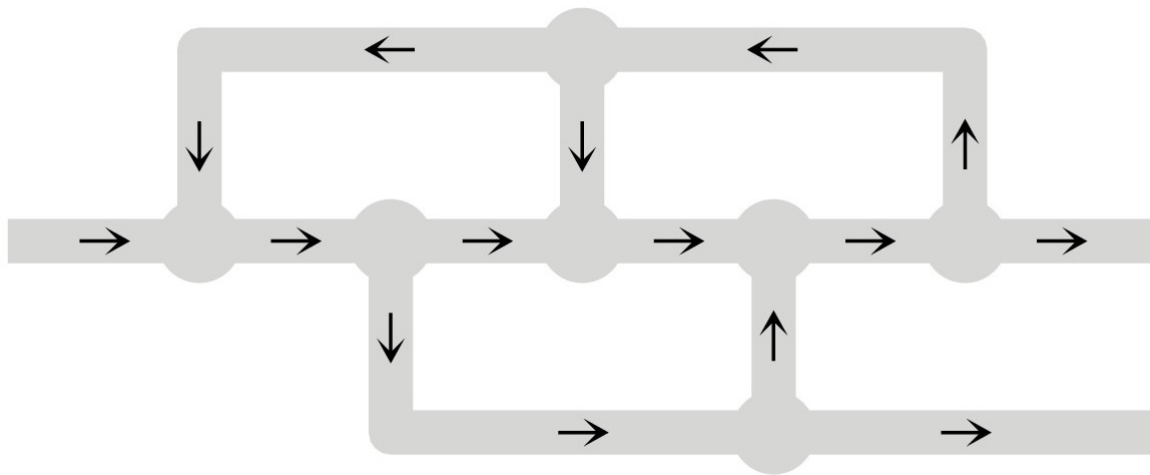
Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.08

---

## В-4





Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.67

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 7–8 класса

---

**Задача 6**

**В-1** Найдите все натуральные  $n < 26$ , при которых любое  $x > 0$ , удовлетворяющее

$$\{8x\} = \{25x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{26x\} = \{nx\},$$

где  $\{\cdot\}$  — дробная часть числа.

Дробной частью  $a$  называют следующее число:  $\{a\} = a - k$ , где  $k$  — наибольшее целое число, которое меньше или равно  $a$ . Например,  $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$ ,  $\{0.5\} = 0.5$ ,  $\{5\} = 0$ .

**Ответ:** 9

**Решение.** Заметим, что т.к. дробные части чисел  $25x$  и  $8x$  совпадают, их разность  $25x - 8x$  будет натуральной. Значит,  $25x - 8x = 17x$  — натуральное число. Тогда если  $n = 9$ , то  $26x - 9x = 17x$  — натуральное число. Поэтому  $\{26x\} = \{nx\}$ . Докажем, что других  $n$  нет. Нам известно, что  $17x$  — натуральное число. Тогда или само  $x$  натуральное, или  $x$  имеет вид  $\frac{p}{17}$ , где  $p$  натуральное. Когда  $x$  натуральное, то все уравнения в условии принимают вид  $0 = 0$ , то есть при целом  $x$  годится любая  $n$ . Но  $x$  может принимать и не целые значения — пусть  $x = \frac{p}{17}$ , где  $p$  не делится на 17. Тогда  $26x - nx = \frac{(26 - n)p}{17}$  — целое число. Тогда  $26 - n$  делится на 17, то есть  $n = 9$ . Под все возможные  $x$  подходит только  $n = 9$ .

**Примечание.** В выданных участникам вариантах была допущена опечатка — в варианте 2 и 4 стояло  $n < 26$  вместо  $n < 23$ . Поэтому в варианте 2 также принимался ответ 12, 25, а в варианте 4 — ответ 10, 23.

---

**В-2** Найдите все натуральные  $n < 23$ , при которых любое  $x > 0$ , удовлетворяющее

$$\{10x\} = \{23x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{25x\} = \{nx\},$$

где  $\{\cdot\}$  — дробная часть числа.

Дробной частью  $a$  называют следующее число:  $\{a\} = a - k$ , где  $k$  — наибольшее целое число, которое меньше или равно  $a$ . Например,  $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$ ,  $\{0.5\} = 0.5$ ,  $\{5\} = 0$ .

**Ответ:** 12

---

**В-3** Найдите все натуральные  $n < 26$ , при которых любое  $x > 0$ , удовлетворяющее

$$\{9x\} = \{28x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{30x\} = \{nx\},$$

где  $\{\cdot\}$  — дробная часть числа.

Дробной частью  $a$  называют следующее число:  $\{a\} = a - k$ , где  $k$  — наибольшее целое число, которое меньше или равно  $a$ . Например,  $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$ ,  $\{0.5\} = 0.5$ ,  $\{5\} = 0$ .

**Ответ:** 11

---

**В-4** Найдите все натуральные  $n < 23$ , при которых любое  $x > 0$ , удовлетворяющее

$$\{11x\} = \{24x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{23x\} = \{nx\},$$

где  $\{\cdot\}$  — дробная часть числа.

Дробной частью  $a$  называют следующее число:  $\{a\} = a - k$ , где  $k$  — наибольшее целое число, которое меньше или равно  $a$ . Например,  $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$ ,  $\{0.5\} = 0.5$ ,  $\{5\} = 0$ .

**Ответ:** 10

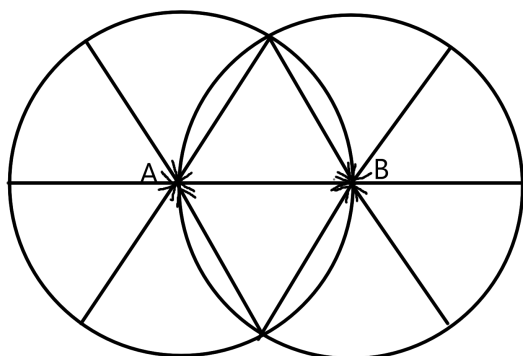
---

### Задача 7

**В-1** 50 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 10

**Решение.** (Для варианта 1, 50 человек.) Заметим, что в каждого ребенка может попасть не более 6 снежков. Так как иначе у каждого метателя найдётся другой ребенок, который окажется к нему ближе. Ровно 6 снежков ребенок может получить только в том случае, если в него стреляли дети, находящиеся в вершинах правильного шестиугольника, а подбитый находился в центре этого шестиугольника. Назовем того, кто в центре  $A$ . Он сам попал в одного из этих 6 стрелявших. Назовем второго подбитого  $B$ . Нетрудно показать, что если в  $A$  попало 6 снежков, то в  $B$  не более четырех. Поскольку было выпущено 50 снежков, а в каждого мальчика попало не более 6 снежков, то подбито не менее 9-ти детей. Если подбито ровно 9 детей, то не меньше 5-ти из них подбито 6-ю снежками. Но тогда должно быть еще 5 подбитых детей. Что противоречит противоречию, что всего 9 подбитых детей. Следовательно, снежками попали не менее чем в 10 детей. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 детей приведена на картинке, где дети разбиваются на 5 групп по 10 человек и в каждой группе оказывается ровно двое детей, в которых попали снежком.



---

**В-2** 60 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 12

---

**В-3** 70 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 14

---

**В-4** 40 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

**Ответ:** 8

---